ALMA MATER STUDIORUM
UNIVERSITÀ DI BOLOGNA
CAMPUS DI RIMINI

EQUAZIONI DI SECONDO GRADO

Monica Bagagli

PRECORSO DI MATEMATICA GENERALE CLET E CLEI

$$ax^2+bx+c=0 \qquad (a\neq 0)$$

L'equazione è <u>completa</u> se i coefficienti sono tutti diversi da zero, altrimenti è <u>incompleta</u>.

ALMA MATER STUDIORUM
UNIVERSITÀ DI BOLOGNA
CAMPUS DI RIMINI

RISOLUZIONE DI EQUAZIONI DI SECONDO GRADO INCOMPLETE

1) ax^2+bx=0 $(b\neq 0, c = 0)$ EQUAZIONE SPURIA

x(ax+b)=0

PER LA LEGGE DI ANNULLAMENTO DEL PRODOTTO:

x= 0 v ax+b=0

$$x = -\frac{b}{a}$$

Le soluzioni sono x_1=0 , x_2= - $\frac{b}{a}$

S= $\left\{0, -\frac{b}{a}\right\}$

ALMA MATER STUDIORUM
UNIVERSITÀ DI BOLOGNA
CAMPUS DI RIMINI

Esempi:

1. $6x^2$-5x=0

x(6x-5)=0

x=0 $\vee$ $6x - 5 = 0$

$\Downarrow$

$x = \frac{5}{6}$

$S = \left\{0, \frac{5}{6}\right\}$

2. $4x(2x+1)=0$

$4x=0 \quad \vee \quad 2x+1=0$

$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$

$x=0 \qquad x=-\frac{1}{2}$

$S=\left\{0,-\frac{1}{2}\right\}$

2. ax^2+c=0 $(b = 0, c \neq 0)$ EQUAZIONE PURA

PUO' ESSERE SEMPRE RICONDOTTA ALLA FORMA x^2=K

x^2=K

Se K> 0 allora x=$\pm\sqrt{k}$ 2 soluzioni reali e opposte $S = \{\pm\sqrt{k}\}$

Se K< 0 allora non esistono soluzioni reali S=∅

Esempi:

1. $5x^2$-20=0

$5x^2 = 20$

$x^2 = 4$ $\longrightarrow$ x= $\pm$ 2 (2 soluzioni reali e opposte)

S= $\{\pm 2\}$

2. $3x^2 + 27 = 0$

$3x^2 = -27$

$x^2 = -9$ (non esistono soluzioni reali)

S= ∅

3. $ax^2=0$ (b=0, c=0) EQUAZIONE MONOMIA

E' VERIFICATA SOLO PER X=0.

SI HANNO COSI' DUE SOLUZIONI REALI E COINCIDENTI NULLE:

$$x_1 = x_2 = 0$$

Esempio: $3x^2=0$

$x^2=0 \longrightarrow x_1 = x_2 = 0$

$S=\{0\}$

Risoluzione di equazioni di secondo grado complete

$ax^2+bx+c=0 \qquad (a \neq 0, \quad b \neq 0 , \quad c \neq 0)$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Dove $b^2 - 4ac = \Delta$ discriminante

Si possono distinguere tre casi:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$\Delta > 0$

2 soluzioni reali e distinte

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \quad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$S = \left\{\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}, \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right\}$$

$\Delta = 0$

2 soluzioni reali e coincidenti

$$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a} \qquad S = \left\{-\frac{b}{2a}\right\}$$

$\Delta < 0$ Non esistono soluzioni reali $S = \emptyset$

Esempi:

1. $x^2 - 5x + 6 = 0$

a= 1
b= -5
c = 6

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2}$$

$$x = \frac{5 \pm 1}{2}$$

$$x_1 = \frac{5-1}{2} = 2$$

$$x_2 = \frac{5+1}{2} = 3$$

S= $\{2, 3\}$

2. $x^2 - 4x + 4 = 0$

a= 1

b= -4

c = 4

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 16}}{2}$$

$$x = \frac{4 \pm 0}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

$$x_1 = x_2 = 2$$

S= {2}

ALMA MATER STUDIORUM
UNIVERSITÀ DI BOLOGNA
CAMPUS DI RIMINI

Osservazione:

$x^2-4x+4=(x-2)^2$

Quindi:

$$x^2-4x+4=0$$

$$(x-2)^2=0$$

$$x=2$$

$$S=\{2\}$$

2. x^2+x +1 =0

a= 1

b= 1

c = 1

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2}$$

($\Delta < 0$)

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$$

POICHE' $\Delta < 0$ NON ESISTONO SOLUZIONI REALI

S=∅

LA FORMULA RIDOTTA

Se b è un numero pari è utile applicare la formula ridotta:

$$x = \frac{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(-\frac{b}{2}\right)^2 - ac}}{a}$$

Esempio: $x^2 - 2x - 35 = 0$

x= $1 \pm \sqrt{1 + 35}$

x= $1 \pm \sqrt{36}$

x= 1 ± 6

-5

7

S=$\{-5, 7\}$

ALMA MATER STUDIORUM
UNIVERSITÀ DI BOLOGNA
CAMPUS DI RIMINI

Scomposizione di un trinomio di secondo grado

$ax^2+bx+c=$

$a(x-x_1)(x-x_2)$ se $\Delta > 0$

$a(x-x_1)^2$ se $\Delta = 0$

irriducibile se $\Delta < 0$

Esempio:

$2x^2 - x - 3$

RISOLVENDO L'EQUAZIONE ASSOCIATA SI HA: $2x^2 - x - 3 = 0$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{4} = \frac{1 \pm 5}{4} = \begin{cases} -1 \\ \frac{3}{2} \end{cases}$$

Da cui:

$$2x^2 - x - 3 = 2\left(x - \frac{3}{2}\right)(x+1) = (2x-3)(x+1)$$

Esercizio

$$\frac{x}{x-3} - \frac{4}{x+3} = \frac{21-x}{x^2-9}$$

(x-3) (x+3)

m.c.m. dei denominatori: (x-3) (x+3)

C. E. : $X-3 \neq 0, \; X \neq 3$

$X+3 \neq 0, \; X \neq -3$

$$\frac{x(x+3)-4(x-3)}{(x-3)(x+3)} = \frac{21-x}{(x-3)(x+3)}$$

$x^2+3x-4x+12=21-x$

$x^2 - 9 = 0 \longrightarrow x=\pm 3$ soluzioni non accettabili

$S=\emptyset$

ALMA MATER STUDIORUM
UNIVERSITÀ DI BOLOGNA
CAMPUS DI RIMINI

Esercizio prova finale del 3/10/2007

$(x-2)^2+9x=2(x+2)(x-2)+18$

$x^2+4-4x+9x=2(x^2-4)+18$

$x^2+4-4x+9x=2x^2-8+18$

$-x^2+5x-6=0$

$x^2-5x+6=0$

$$x=\frac{5\pm\sqrt{25-24}}{2}=\frac{5\pm 1}{2}= \begin{cases} 2 \\ 3 \end{cases}$$

S={2, 3}

ALMA MATER STUDIORUM
UNIVERSITÀ DI BOLOGNA
CAMPUS DI RIMINI

Esercizi:

1) $\frac{x^2-7x+12}{x-3} = 0$

2) $\frac{(x+2)^2-1}{x} = 8$

3) $\frac{(x+1)(x-1)}{2} = x$

4) $\frac{1}{x^2-1} - 1 = \frac{1}{x-1}$

Prova finale 13.10.06

$$\frac{x^2-7x+12}{x-3}=0$$

C.E.

$\underline{x \neq 3}$

$$x^2-7x+12=0$$

$$x=\frac{7\pm\sqrt{49-48}}{2}=\frac{7\pm 1}{2}=$$

$\frac{7-1}{2}=\frac{6}{2}=3$ Non acc.

$\frac{7+1}{2}=\frac{8}{2}=4$

$x=4$

$S=\{4\}$

ALMA MATER STUDIORUM
UNIVERSITÀ DI BOLOGNA
CAMPUS DI RIMINI

Esercizio 1 ottobre 2008

$$\frac{(x+2)^2-1}{x} = 8$$

C.E.

$x \neq 0$

$$\frac{(x+2)^2-1}{x} = \frac{8x}{x}$$

$$x^2+4x+4-1 = 8x$$

$$x^2-4x+3=0$$

$$x = 2 \pm \sqrt{4-3}$$

$$x = 2 \pm 1 \begin{cases} 1 & \text{Acc.} \\ 3 & \text{Acc.} \end{cases}$$

Risposta: $S = \{1, 3\}$

ALMA MATER STUDIORUM
UNIVERSITÀ DI BOLOGNA
CAMPUS DI RIMINI

Esercizio

Prova finale 18.09.2009

$$\frac{(x+1)(x-1)}{2} = x$$

$$\frac{x^2-1}{2} = x$$

$$\frac{x^2-1}{2} = \frac{2x}{2}$$

$$x^2-2x-1 = 0$$

$$x = 1 \pm \sqrt{1+1}$$

$$= 1 \pm \sqrt{2}.$$

$$S = \{1-\sqrt{2},\ 1+\sqrt{2}\}$$

TER STUDIORUM
TÀ DI BOLOGNA
DI RIMINI

Esercizio (prova finale 22/09/2011)

$$\frac{1}{x^2-1} - 1 = \frac{1}{x-1}$$

$\downarrow$

$(x-1)(x+1)$

C.E.

$x-1 \neq 0 \rightarrow x \neq 1$

$x+1 \neq 0 \rightarrow x \neq -1$

$x \neq -1 \wedge x \neq 1$

$$\frac{1-(x^2-1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{x+1}{(x-1)(x+1)}$$

$$1 - x^2 + 1 = x + 1$$

$$x^2 + x - 1 = 0$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$ sol. accettabili

$$S = \left\{ \frac{-1-\sqrt{5}}{2}, \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \right\}$$

A MATER STUDIORUM
VERSITÀ DI BOLOGNA
APUS DI RIMINI