ALMA MATER STUDIORUM
UNIVERSITÀ DI BOLOGNA
CAMPUS DI RIMINI

EQUAZIONI DI SECONDO GRADO

Monica Bagagli

PRECORSO DI MATEMATICA GENERALE CLET E CLEI

$$ax^2+bx+c=0 \qquad (a \neq 0)$$

L'equazione è <u>completa</u> se i coefficienti sono tutti diversi da zero, altrimenti è <u>incompleta</u>.

RISOLUZIONE DI EQUAZIONI DI SECONDO GRADO INCOMPLETE

1) $ax^2+bx=0$ $(b\neq 0, c=0)$ EQUAZIONE SPURIA

$x(ax+b)=0$

PER LA LEGGE DI ANNULLAMENTO DEL PRODOTTO:

$x=0$ v $ax+b=0$

$$x = -\frac{b}{a}$$

Le soluzioni sono $x_1=0$, $x_2= -\frac{b}{a}$

$$S= \left\{0, -\frac{b}{a}\right\}$$

ALMA MATER STUDIORUM
UNIVERSITÀ DI BOLOGNA
CAMPUS DI RIMINI

Esempi:

1. $6x^2$-5x=0

x(6x-5)=0

x=0 v $6x - 5 = 0$

$x = \frac{5}{6}$

$S = \left\{0, \frac{5}{6}\right\}$

2. $4x(2x+1)=0$

$4x=0$ v $2x+1=0$

$x=0$ $x=-\frac{1}{2}$

$S=\left\{0,-\frac{1}{2}\right\}$

2. $ax^2+c=0$ $(b=0, c \neq 0)$ EQUAZIONE PURA

PUO' ESSERE SEMPRE RICONDOTTA ALLA FORMA $x^2=K$

$x^2=K$

Se K> 0 allora $x=\pm\sqrt{k}$ 2 soluzioni reali e opposte $S=\{\pm\sqrt{k}\}$

Se K< 0 allora non esistono soluzioni reali S=Ø

Esempi:

1. $5x^2$-20=0

$5x^2 = 20$

$x^2 = 4$ ⟶ x= ± 2 (2 soluzioni reali e opposte)

S= {±2}

2. $3x^2 + 27 = 0$

$3x^2 = -27$

$x^2 = -9$ (non esistono soluzioni reali)

S= Ø

3. $ax^2=0$ (b=0, c=0) EQUAZIONE MONOMIA

E' VERIFICATA SOLO PER X=0.

SI HANNO COSI' DUE SOLUZIONI REALI E COINCIDENTI NULLE:

$$x_1 = x_2 = 0$$

Esempio: $3x^2=0$

$x^2=0$ $\longrightarrow$ $x_1 = x_2 = 0$

$S= \{0\}$

Risoluzione di equazioni di secondo grado complete

$ax^2+bx+c=0 \qquad (a \neq 0, \quad b \neq 0, \quad c \neq 0)$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Dove $b^2-4ac = \Delta$ discriminante

Si possono distinguere tre casi:

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta < 0$ Non esistono soluzioni reali $S = \emptyset$

$\Delta > 0$

2 soluzioni reali e distinte

$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

$S = \left\{\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}, \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right\}$

$\Delta = 0$

2 soluzioni reali e coincidenti

$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$ $S = \left\{-\frac{b}{2a}\right\}$

Esempi:

1. $x^2 - 5x + 6 = 0$ a= 1
b= -5
c = 6

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2}$$

$$x = \frac{5 \pm 1}{2} \rightarrow x_1 = \frac{5-1}{2} = 2 \quad x_2 = \frac{5+1}{2} = 3$$

S= {2, 3}

2. $x^2 - 4x + 4 = 0$

a= 1

b= -4

c = 4

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 16}}{2}$$

$$x = \frac{4 \pm 0}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

$$x_1 = x_2 = 2$$

S= {2}

Osservazione:

$$x^2-4x+4=(x-2)^2$$

Quindi:

$$x^2-4x+4=0$$

$$(x-2)^2=0$$

$$x=2$$

$$S=\{2\}$$

2. $x^2+x+1=0$

a= 1

b= 1

c = 1

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} \qquad (\Delta < 0)$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$$

POICHE' $\Delta < 0$ NON ESISTONO SOLUZIONI REALI

$S = \emptyset$

LA FORMULA RIDOTTA

Se b è un numero pari è utile applicare la formula ridotta:

$$x = \frac{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(-\frac{b}{2}\right)^2 - ac}}{a}$$

Esempio: $x^2 - 2x - 35 = 0$

$x = 1 \pm \sqrt{1 + 35}$

$x = 1 \pm \sqrt{36}$

$x = 1 \pm 6$ → -5

→ 7

$S = \{-5, 7\}$

ALMA MATER STUDIORUM
UNIVERSITÀ DI BOLOGNA
CAMPUS DI RIMINI

Scomposizione di un trinomio di secondo grado

$ax^2+bx+c=$

- $a(x- x_1)(x- x_2)$ se $\Delta > 0$
- $a(x - x_1)^2$ se $\Delta = 0$
- irriducibile se $\Delta < 0$

ALMA MATER STUDIORUM
UNIVERSITÀ DI BOLOGNA
CAMPUS DI RIMINI

Esempio:

$2x^2 - x - 3$

RISOLVENDO L'EQUAZIONE ASSOCIATA SI HA: $2x^2 - x - 3 = 0$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{4} = \frac{1 \pm 5}{4} = \begin{cases} -1 \\ \frac{3}{2} \end{cases}$$

Da cui:

$$2x^2 - x - 3 = 2\left(x - \frac{3}{2}\right)(x + 1) = (2x-3)(x+1)$$

Esercizio

$$\frac{x}{x-3} - \frac{4}{x+3} = \frac{21-x}{x^2-9}$$

(x-3)(x+3)

m.c.m. dei denominatori: (x-3)(x+3)

C. E. : X-3≠ 0, X ≠ 3

X+3 ≠0, X ≠-3

$$\frac{x(x+3)-4(x-3)}{(x-3)(x+3)} = \frac{21-x}{(x-3)(x+3)}$$

x^2+3x-4x+12=21-x

$x^2 - 9 = 0$ ⟶ x=±3 soluzioni non accettabili

S=ø

ALMA MATER STUDIORUM
UNIVERSITÀ DI BOLOGNA
CAMPUS DI RIMINI

Esercizio prova finale del 3/10/2007

$(x-2)^2+9x=2(x+2)(x-2)+18$

$x^2+4-4x+9x=2(x^2-4)+18$

$x^2+4-4x+9x=2x^2-8+18$

$-x^2+5x-6=0$

$x^2-5x+6=0$

$$x=\frac{5\pm\sqrt{25-24}}{2}=\frac{5\pm1}{2}=$$

2

3

S={2, 3}

Esercizi:

1) $\frac{x^2-7x+12}{x-3} = 0$

2) $\frac{(x+2)^2-1}{x} = 8$

3) $\frac{(x+1)(x-1)}{2} = x$

4) $\frac{1}{x^2-1} - 1 = \frac{1}{x-1}$

Prova finale 13.10.06

$$\frac{x^2-7x+12}{x-3}=0$$

C.E.

$x \neq 3$

$$x^2-7x+12=0$$

$$x=\frac{7\pm\sqrt{49-48}}{2}=\frac{7\pm 1}{2}=\begin{cases}\frac{7-1}{2}=\frac{6}{2}=3 \quad \text{Non acc.}\\ \frac{7+1}{2}=\frac{8}{2}=4\end{cases}$$

$x = 4$

$S = \{4\}$

ALMA MATER STUDIORUM
UNIVERSITÀ DI BOLOGNA
CAMPUS DI RIMINI

Esercizio

1 ottobre 2008

$$\frac{(x+2)^2-1}{x} = 8$$

C. E.

$x \neq 0$

$$\frac{(x+2)^2-1}{x} = \frac{8x}{x}$$

$$x^2+4x+4-1 = 8x$$

$$x^2-4x+3 = 0$$

$$x = 2 \pm \sqrt{4-3}$$

$$x = 2 \pm 1 \begin{cases} 1 & \text{Acc.} \\ 3 & \text{Acc.} \end{cases}$$

Risposta: $S = \{1, 3\}$

ALMA MATER STUDIORUM
UNIVERSITÀ DI BOLOGNA
CAMPUS DI RIMINI

Esercizio

Prova finale
18.09.2009

$$\frac{(x+1)(x-1)}{2} = x$$

$$\frac{x^2-1}{2} = x$$

$$\frac{x^2-1}{2} = \frac{2x}{2}$$

$$x^2-2x-1 = 0$$

$$x = 1 \pm \sqrt{1+1}$$

$$= 1 \pm \sqrt{2}.$$

$$S = \{1-\sqrt{2},\ 1+\sqrt{2}\}$$

TER STUDIORUM
TÀ DI BOLOGNA
DI RIMINI

Esercizio (prova finale 22/09/2014)

$$\frac{1}{x^2-1} - 1 = \frac{1}{x-1}$$

$\downarrow$

$(x-1)(x+1)$

C.E.

$x-1 \neq 0 \rightarrow x \neq 1$

$x+1 \neq 0 \rightarrow x \neq -1$

$x \neq -1 \wedge x \neq 1$

$$\frac{1-(x^2-1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{x+1}{(x-1)(x+1)}$$

$$1 - x^2 + 1 = x + 1$$

$$x^2 + x - 1 = 0$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$ sol. accettabili

$$S = \left\{ \frac{-1-\sqrt{5}}{2} , \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \right\}$$

A MATER STUDIORUM
VERSITÀ DI BOLOGNA
IPUS DI RIMINI